Calcul différentiel

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle ouvert
E, F, G et H désignent des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies
U, V désignent des ouverts de E, F.

I. Différentielle d'une fonction

1°) Différentiabilité

Soit $f : U \subset E \to F$ et $a \in U$

Déf : On appelle développement limité à l'ordre 1 de f en a toute écriture :
$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o\big(\|h\|\big)$ quand $h \to 0$ avec $\ell \in \mathcal{L}(E,F)$.

Prop : Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a alors l'application linéaire ℓ qui le décrit est unique.

Déf : Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a on dit que f est différentiable en a et l'application linéaire ℓ est appelée différentielle de f en a ou application linéaire tangente de f en a. On la note $\mathrm{d}f(a)$ ou $\mathrm{d}f_a$.

Prop : Si f est différentiable en a alors f est continue en a.

2°) Fonctions différentiables

Déf : La fonction $f : U \subset E \to F$ est dite différentiable ssi f est différentiable en tout point $a \in U$.
L'application $\mathrm{d}f : U \to \mathcal{L}(E,F)$ est alors appelée différentielle de f.

Prop : Les fonctions différentiables sont continues.

3°) Opérations sur les fonctions différentiables

Théorème :
Soit $f, g : U \subset E \to F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont différentiables alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi et $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{d}f + \mu \mathrm{d}g$.

Théorème :
Soit $f : U \subset E \to F$, $g : U \subset E \to F$ et $b : F \times G \to H$ bilinéaire.
Si f et g sont différentiables alors $b(f,g)$ l'est aussi et $\mathrm{d}b(f,g) = b(\mathrm{d}f, g) + b(f, \mathrm{d}g)$.

Cor : Pour $f, g : U \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $\mathrm{d}(fg) = \mathrm{d}f.g + f.\mathrm{d}g$.

Théorème :
Soit $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset F \to G$ telles que $f(U) \subset V$.
Si f et g sont différentiables alors $g \circ f$ aussi et pour tout $a \in U$, $\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \big[(\mathrm{d}g) f(a)\big] \circ \mathrm{d}f(a)$.

Cor : Soit $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ et $\varphi : V \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(U) \subset V$.
Si f est différentiable et φ dérivable $\varphi(f) = \varphi \circ f$ l'est aussi $\mathrm{d}\varphi(f) = \varphi'(f).\mathrm{d}f$.

Théorème :
Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de F et $f : U \subset E \to F$.
f est différentiable ssi ses fonctions composantes $f_1, \ldots, f_n$ le sont.
De plus si tel est le cas $\mathrm{d}f = \mathrm{d}f_1.\varepsilon_1 + \cdots + \mathrm{d}f_n.\varepsilon_n$.

II. Dérivées partielles

1°) Dérivée selon un vecteur

Soit $f : U \subset E \to F$, $a \in U$ et $h \in E$.

Déf : On appelle vecteur dérivé de f en a selon h, s'il existe, le vecteur $\mathrm{D}_h f(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t}\big(f(a+t.h) - f(a)\big)$.

Prop : Si f est différentiable en a alors f est dérivable en a selon tout vecteur $h \in E$ et $\mathrm{D}_h f(a) = \mathrm{d}f(a)(h)$.

2°) Dérivées partielles

On suppose l'espace E muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$. Soit $f:U\subset E\to F$.

Déf : S'il existe, le vecteur $\mathrm{D}_{e_j}f(a)$ est appelé $j^{\text{ème}}$ vecteur dérivé partiel de $f:U\subset E\to F$ en $a\in U$. On le note $\mathrm{D}_j f(a)=\mathrm{D}_{e_j}f(a)$.

Déf : Si elle existe, l'application $a\mapsto \mathrm{D}_j f(a)$ est appelée appelle $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f.

Prop : Si f est différentiable en a alors f admet des dérivées partielles en a qui sont $\mathrm{D}_j f(a)=\mathrm{d}f(a)(e_j)$ et de plus, pour tout $h=h_1e_1+\cdots+h_pe_p\in E$: $\mathrm{D}_h f(a)=\mathrm{d}f_a(h)=\sum_{j=1}^{n}h_j\mathrm{D}_j f(a)$.

3°) Dérivées partielles et applications partielles

On suppose l'espace E muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$.

Soit $f:U\subset E\to F$. Pour $x\in U$, $x=x_1e_1+\cdots+x_pe_p$, $f(x)=f(x_1e_1+\cdots+x_pe_p)$

Déf : Pour $x=x_1e_1+\cdots+x_pe_p\in U$, on appelle $j^{\text{ème}}$ application partielle de f en x l'application $t\mapsto f(x_1e_1+\cdots+te_j+\cdots+x_pe_p)$.

Théorème :

Les dérivées partielles de $f:U\subset E\to F$ sont les dérivées des applications partielles de f.

Autrement dit $\mathrm{D}_j f(x)=\big(x_j\mapsto f(x)\big)'=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\big(f(x)\big)$

Déf : Si l'on convient de noter $x_1,\dots,x_p$ les composantes génériques d'un vecteur x de E alors il est usuel de noter $\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_p}$ les dérivées partielles de f.

III. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

1°) Définition

On suppose l'espace E muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$.

Déf : On dit que $f:U\subset E\to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (dans la base $\mathcal{B}$) ssi ses dérivées partielles de f existent et sont continues. On note $\mathcal{C}^1(U,F)$ l'ensemble de ses fonctions.

Théorème :

Si $f:U\subset E\to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f est différentiable (et donc continue)

Cor : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors pour tout $a\in U$ et tout $h=h_1e_1+\cdots+h_pe_p\to 0$,

$f(a+h)=f(a)+\sum_{j=1}^{p}h_j\mathrm{D}_j f(a)+o(\|h\|)$ avec $h=h_1e_1+\cdots+h_pe_p$.

Prop : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors pour tout $h\in E$, $a\mapsto \mathrm{D}_h f(a)$ est continue.

2°) Opérations

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E.

Théorème :

Soit $f,g:U\subset E\to F$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\lambda f+\mu g$ l'est aussi et $\mathrm{D}_j(\lambda f+\mu g)=\lambda\mathrm{D}_j f+\mu\mathrm{D}_j g$.

Théorème :

Soit $f:U\subset E\to F$, $g:U\subset E\to G$ et $b:F\times G\to H$ bilinéaire.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $b(f,g)$ l'est aussi et $\mathrm{D}_j b(f,g)=b(\mathrm{D}_j f,g)+b(f,\mathrm{D}_j g)$

Théorème :

Soit $f:U\subset E\to\mathbb{R}$ et $\varphi:V\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f(U)\subset V$.

Si f et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\varphi(f)=\varphi\circ f$ l'est aussi $\mathrm{D}_j\varphi(f)=\varphi'(f)\mathrm{D}_j(f)$.

Théorème :

Soit $\mathcal{C}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ une base de F.

$f:U\subset E\to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ssi ses applications composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et si tel est le cas $\mathrm{D}_j f=\mathrm{D}_j f_1\varepsilon_1+\cdots+\mathrm{D}_j f_n\varepsilon_n$. Ainsi $\left(\mathrm{D}_j f\right)_i=\mathrm{D}_j(f_i)$.

3°) Composition

On suppose E et F munis de bases $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ et $\mathcal{C}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$.

Théorème :

Soit $f:U\subset E\to F$ et $g:V\subset F\to G$ telles que $f(U)\subset V$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $g\circ f$ l'est aussi.

De plus $\mathrm{D}_j(g\circ f)(a)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_j f_i(a).\mathrm{D}_i g(f(a))$ avec $f_1,\dots,f_n$ les fonctions composantes de f.

Prop : Soit $\gamma:I\to E$ et $f:U\subset E\to F$ telles que $\gamma(I)\subset U$.

Si f et γ sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $f\circ\gamma:t\mapsto f(\gamma(t))$ l'est aussi et :

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(\gamma(t))\big)=\big[\mathrm{d}f(\gamma(t))\big](\gamma'(t))=\gamma_1'(t)\mathrm{D}_1 f(\gamma(t))+\cdots+\gamma_p'(t)\mathrm{D}_p f(\gamma(t))$ avec γ_j les fonctions composantes de γ.

4°) Matrice jacobienne

On suppose E,F,G munis de bases et on pose $p=\dim E$, $n=\dim F$ et $m=\dim G$.

Déf : Soit $f:U\subset E\to F$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On appelle matrice jacobienne de f en $a\in U$ la matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$: $\mathrm{Jac}(f)(a)=\left(\mathrm{D}_j f_i(a)\right)\in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Déf : Soit $f:U\subset E\to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si $\dim E=\dim F$, on appelle jacobien de f en a le déterminant de la matrice jacobienne de f en a.

Théorème :

Pour $f:U\subset E\to F$ et $g:V\subset F\to G$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(U)\subset V$ on a

$\mathrm{Jac}(g\circ f)(a)=\mathrm{Jac}(g)(f(a))\times\mathrm{Jac}(f)(a)$.

5°) Difféomorphisme

Déf : On appelle $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U vers V toute application $f:U\to V$ bijective telle que f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème :

Si f est $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U vers V alors pour tout $a\in U$, $\mathrm{d}f(a)$ est un isomorphisme et

$\mathrm{d}f^{-1}(a)=\mathrm{d}(f^{-1})(f(a))$ (et donc $\mathrm{Jac}(f^{-1})(f(a))=\left(\mathrm{Jac}\,f(a)\right)^{-1}$)

Cor : S'il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts de E et F alors $\dim E=\dim F$.

Théorème : d'inversion (admis)

Soit $f:U\subset E\to F$ (avec $\dim F=\dim E$) une application de classe $\mathcal{C}^1$ et injective.

Si le jacobien de f ne s'annule pas alors $f(U)$ est ouvert et f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

IV. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

On suppose E muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$.

1°) Définition

Soit $f : U \subset E \to F$.

Déf : La fonction f est appelée dérivée partielle d'ordre 0 de f .

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,p\}$, l'application $\mathrm{D}_{i_k}(\mathrm{D}_{i_{k-1}}(\ldots(D_{i_1}f)\ldots))$, lorsqu'elle existe, est appelée dérivée partielle d'ordre k de f en les i_1 ème, i_2 ème,..., i_k ème variables.

Déf : Pour $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ ssi toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ssi f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \geq 1$. On note $\mathcal{C}^k(U,F)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de U vers F .

Prop : Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a équivalence entre :

(i) f est de classe $\mathcal{C}^k$

(ii) les dérivées partielles de f existent et sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

2°) Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Théorème :

Soit $f,g : U \subset E \to F$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

Si $f,g : U \subset E \to F$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors pour tout $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ l'est aussi.

Théorème :

Soit $f : U \subset E \to F$, $g : U \subset E \to G$ et $b : F \times G \to H$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors $b(f,g)$ l'est aussi.

Théorème :

Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ une base de F .

$f : U \subset E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ ssi ses fonctions coordonnées $f_1,\ldots,f_n$ le sont.

Théorème :

Soit $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset F \to G$ telles que $f(U) \subset V$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors $g \circ f$ l'est aussi

3°) Théorème de Schwarz

Théorème : (admis)

Si $f : U \subset E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ alors pour tout $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, $\mathrm{D}_i(\mathrm{D}_j f) = \mathrm{D}_j(\mathrm{D}_i f)$.

Cor : Soit $f : U \subset E \to F$ de classe $\mathcal{C}^m$.

Pour tout $i_1,\ldots,i_m \in \{1,\ldots,p\}$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ on a :

$\mathrm{D}_{i_{\sigma(m)}}\left(\mathrm{D}_{i_{\sigma(m-1)}}\left(\ldots \mathrm{D}_{i_{\sigma(1)}}(f)\ldots\right)\right) = \mathrm{D}_{i_m}\left(\mathrm{D}_{i_{m-1}}\left(\ldots \mathrm{D}_{i_1}(f)\ldots\right)\right)$.

V. Fonctions numériques

1°) Gradient

Ici E désigne un espace vectoriel euclidien dont on note $(.|.)$ le produit scalaire.

a) définition

Soit $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème :

Pour tout $a \in U$, il existe un unique vecteur noté $\mathrm{grad}\, f(a)$ tel que :

$\forall h \in E, [\mathrm{d}f(a)](h) = \mathrm{D}_h f(a) = (\mathrm{grad}\, f_a \,|\, h)$.

Prop : Si $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_p)$ est une base orthonormée de E alors $\mathrm{grad}\, f(a) = \mathrm{D}_1 f(a) e_1 + \cdots + \mathrm{D}_p f(a) e_p$.

b) gradient en coordonnées polaires

On suppose le plan géométrique muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soit F une fonction réelle définie sur une partie du plan.
Si (x,y) sont les coordonnées cartésiennes de M, on pose $f(x,y)=F(M)$.

Déf : f est appelée représentation cartésienne de F (dans $\mathcal{R}$)

Sous réserve d'existence, on pose $\dfrac{\partial F}{\partial x}(M)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(M)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}F}(M)=\dfrac{\partial F}{\partial x}(M)\vec{i}+\dfrac{\partial F}{\partial y}(M)\vec{j}$ vérifie alors

$F(M+\vec{u})=F(M)+(\overrightarrow{\text{grad}F}(M)\,|\,\vec{u})+o\left(\|\vec{u}\|\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}F}(M)$ est indépendant du choix de $\mathcal{R}$.

Si (r,θ) est un système de coordonnées polaires de M, on pose $\tilde{f}(r,\theta)=F(M)$.

Déf : $\tilde{f}$ est appelée représentation polaire de F (relative au repère $\mathcal{R}$).

Sous réserve d'existence, on pose $\dfrac{\partial F}{\partial r}(M)=\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(M)=\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)$.

Prop : $\overrightarrow{\text{grad}}F(M)=\dfrac{\partial F}{\partial r}(M)\vec{u}_\theta+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(M)\vec{v}_\theta$.

2°) Accroissements finis

Théorème :

Soit U un ouvert convexe et $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$
$\forall a,b\in U$, $\exists\xi\in[a,b]$, $f(b)-f(a)=[\mathrm{d}f(\xi)](b-a)$.

Cor : S'il existe M tel que pour tout $t\in U$, $\mathrm{d}f(t)$ est M lipschitzienne alors
$\forall a,b\in U, |f(b)-f(a)|\le M\|b-a\|$.

3°) Recherche d'extremum

a) extremum locaux

Déf : On dit que $f:A\subset E\to\mathbb{R}$ admet un minimum local (resp. maximum) en $a\in A$ ssi il existe $\alpha>0$,
$\forall x\in U\cap B(a,\alpha)$, $f(x)\ge f(a)$ (resp. $f(x)\le f(a)$).

Déf : Soit que $f:U\subset E\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On dit que $a\in U$ est un point critique de f ssi $\mathrm{d}f(a)=0$.

Prop : a est point critique de f ssi a annule les dérivées partielles de f.

Théorème :

Si $f:U\subset E\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet un extremum local en a alors a est point critique de f.

b) calcul d'inf et de sup

Prop : $\inf\limits_{(x,y)\in I\times J} f(x,y)=\inf\limits_{x\in I}\left(\inf\limits_{y\in J} f(x,y)\right)$.

Prop : Si K est un compact non vide de E alors $f:K\to\mathbb{R}$ continue admet un minimum et un maximum.
Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U=K^\circ$ et que l'extremum appartient à U alors celui-ci est un point critique de f.

4°) Extremum de fonctions de deux variables réelles

a) développement limité à l'ordre 2

Théorème :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Pour tout $a\in U$ on peut écrire quand $h=(h_x,h_y)\to 0$:

$f(a+h)=f(a)+\ell(h)+\frac{1}{2}q(h)+o\left(\|h\|^2\right)$ avec

$\ell(h_x,h_y)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_x+\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_y$ et $q(h)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)h_xh_y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_y^2$.

Cette relation est appelée développement limité à l'ordre 2 de f en a.

b) notations de Monge

Déf : $p=\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $q=\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)$ et $t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

Théorème :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Si a est un point critique de f ($p=q=0$) alors :

1) Si $rt-s^2<0$ alors f n'a pas d'extremum en a.

2) Si $rt-s^2>0$ et $r>0$ alors f admet un minimum en a.

3) Si $rt-s^2>0$ et $r<0$ alors f admet un maximum en a.

c) surface représentative et plan tangent

Déf : On appelle surface représentative de $f:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ l'ensemble Σ_f formé des points de coordonnées x,y,z vérifiant $(x,y)\in U$ et $z=f(x,y)$.

Déf : Le plan P d'équation $z=f(x_0,y_0)+p(x-x_0)+q(y-y_0)$ est appelé plan tangent à f en $(x_0,y_0)\in U$.

Prop : Si $rt-s^2>0$ et $r>0$ alors Σ_f est localement au dessus de P (point elliptique)

Si $rt-s^2>0$ et $r<0$ alors Σ_f est localement en dessous de P (point elliptique)

Si $rt-s^2<0$ alors Σ_f traverse le plan P (point hyperbolique ou point col)

5°) Equations aux dérivées partielles d'ordre 1

Déf : Résoudre sur U une équation aux dérivées partielles d'ordre 1 en la fonction inconnue f, c'est déterminer toutes les fonctions $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant une relation donnée engageant f et/ou ses dérivées partielles.

Prop : Soit I et J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ et $U=I\times J$.

Les solutions sur U de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ sont les fonctions $f:(x,y)\mapsto C(y)$ où $C\in\mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$.

Les solutions sur U de l'équation $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ sont les fonctions $f:(x,y)\mapsto C(x)$ où $C\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$.

6°) Equations aux dérivées partielles d'ordre 2

Déf : Résoudre sur U une équation aux dérivées partielles d'ordre 2 en la fonction inconnue f, c'est déterminer toutes les fonctions $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant une relation donnée engageant f et/ou ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

Prop : Soit I et J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ et $U=I\times J$.

Les solutions sur U des équations $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$ sont respectivement les fonctions $f:(x,y)\mapsto xC(y)+D(y)$, $f:(x,y)\mapsto yC(x)+D(x)$ et $f:(x,y)\mapsto C(x)+D(y)$ avec C et D fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur I ou J selon les cas.